XXII^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2016

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.

Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1

En una hoja están escritos siete números enteros positivos diferentes. El resultado de la multiplicación de los siete números es el cubo de un número entero. Si el mayor de los números escritos en la hoja es N, determinar el menor valor posible de N. Mostrar un ejemplo para ese valor de N y explicar por qué no es posible que N sea más chico.

PROBLEMA 2

En una competición deportiva en la que se realizan varias pruebas, solo participan los tres atletas A, B, C. En cada prueba, el ganador recibe x puntos, el segundo recibe y puntos y el tercero recibe z puntos. No hay empates, y los números x, y, z son enteros positivos distintos con x mayor que y, e y mayor que z.
Al terminar la competición resulta que A ha acumulado 20 puntos, B ha acumulado 10 puntos y C ha acumulado 9 puntos. Sabemos que el atleta A fue segundo en la prueba de 100 metros. Determinar cuál de los tres atletas resultó segundo en la prueba de salto.

PROBLEMA 3

En el triángulo ABC se marcaron el punto D en el lado BC y el punto E en el lado AC de manera que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo ACB mide 20^o. Calcular la medida del ángulo ADE.

PROBLEMA 4

Dado un tablero de 3×3 se quiere escribir en sus casillas los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y un número entero positivo M, no necesariamente distinto de los anteriores. El objetivo es que la suma de los tres números de cada fila sea la misma.
a) Hallar todos los valores de M para los que esto es posible.
b) ¿Para cuáles de los valores de M hallados en a) es posible acomodar los números de modo que no solo las tres filas sumen lo mismo sino que también las tres columnas sumen lo mismo?

PROBLEMA 5

En el pizarrón están escritos los 400 números enteros 1, 2, 3, ..., 399, 400. Luis borra 100 de estos números, luego Martín borra otros 100. Martín gana si la suma de los 200 números borrados es igual a la suma de los no borrados; en otro caso, gana Luis. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora?
¿Y si Luis borra 101 números y Martín borra 99?
En cada caso, explicar cómo puede asegurarse la victoria el jugador que tiene la estrategia ganadora.

XXIIª OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2016

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.

Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo.

PROBLEMA 1

Decimos que un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, que comienza en a y termina en d, es *intercambiable* si existe un entero $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ es un número de cuatro cifras que comienza en d y termina en a. Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que $1009 \times 9 = 9081$. Hallar el mayor número intercambiable.

PROBLEMA 2

¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de 5×5 de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de 2×2 haya al menos una casilla pintada?

PROBLEMA 3

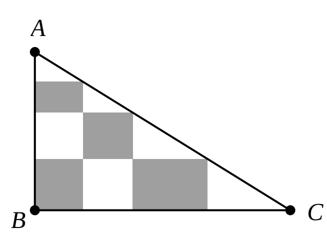
Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* si es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.
a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.
b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.

PROBLEMA 4

En un triángulo ABC, sean D y E puntos de los lados BC y AC, respectivamente. Los segmentos AD y BE se cortan en O. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a AB, divide al segmento DE por la mitad. Demostrar que el triángulo ABO y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

PROBLEMA 5

Rosa y Sara juegan con un triángulo ABC, recto en B. Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa AC, luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa AC distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados AB y BC, formándose la siguiente figura.



Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada; en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.